La longitud de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a>b$ y la de la onda de la senoide $y=\sqrt{a^2-b^2}\sin\left(\frac{x}{b}\right)$, con $0\le x\le 2\pi b$, son iguales

Para calcular la longitud de la elipse, usaremos sus ecuaciones paramétricas $x=a\sin\theta, y=b\cos\theta$, y por simetría de la elipse, consideraremos su longitud tomando cuatro veces la longitud del primer cuadrante, esto es para cuando $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

Puesto que la longitud de una curva dada en ecuaciones paramétricas es $\ell=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$, entonces, puesto que $\frac{dx}{d\theta}=a\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=-b\sin\theta$ se tiene

$$\ell=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a\cos\theta)^2+(-b\sin\theta)^2}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta$$

$$\ell=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\left(1-\sin^2\theta\right)+b^2\sin^2 d\theta}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(b^2-a^2\right)\sin^2\theta+a^2}d\theta$$

$$\ell=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-\left(a^2-b^2\right)\sin^2\theta d\theta}=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin^2\theta d\theta}$$

y puesto que en una elipse la distancia semifocal *c* cumple con $a^2-b^2=c^2$ y su excentricidad es $\varepsilon=\frac{c}{a}$, se tiene

$$\ell=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{c^2}{a^2}\right)\sin^2\theta d\theta}=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-m\sin^2\theta}d\theta$$

La integral $E(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-m\sin^2\theta}d\theta$, con $m=\varepsilon^2$ y $0<m<1$, es una integral elíptica que no puede resolverse en términos de funciones elementales (existen tablas o métodos numéricos para encontrar aproximaciones de estas integrales)

De manera pues que la longitud de la elipse es $\ell=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-m\sin^2\theta}d\theta=4aE(m)$

Ahora veamos cual es la longitud de una onda de la curva senoide

$y=\sqrt{a^2-b^2}\sin\left(\frac{x}{b}\right)=c\sin\left(\frac{x}{b}\right),\ \ 0\le x\le 2\pi b$

con $c=\sqrt{a^2-b^2}$ y $\frac{dy}{dx}=\frac{c}{b}\cos\left(\frac{x}{b}\right)$

Por simetría de la curva, tomaremos cuatro veces la longitud situada sobre la primera cuarta parte del intervalo $0 \le x \le 2\pi b$, eso es sobre $0 \le x \le \frac{\pi b}{2}$

La longitud de una curva en coordenadas cartesianas esta dada por

$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi b}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{c}{b}\cos\left(\frac{x}{b}\right)\right)^2}\, dx$, haciendo $\theta = \frac{x}{b}$, se tiene

$$\ell = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\theta}\,(bd\theta) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\left(1-\sin^2\theta\right)}\,(bd\theta)$$

$$\ell = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}-\frac{c^2}{b^2}\sin\theta}\,(bd\theta) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(b^2+c^2\right)-c^2\sin\theta}\, d\theta$$

$$\ell = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-c^2\sin^2\theta}\, d\theta = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin^2\theta}\, d\theta = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$\ell = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\, d\theta = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-m\sin^2\theta}\, d\theta = 4aE(m)$$

Y por lo tanto, como podemos ver, la longitud de la elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

y la longitud de la onda senoidal $y=\sqrt{a^2-b^2}\sin\left(\frac{x}{b}\right)$ son exactamente iguales.

y su valor es $\ell = 4aE(m)$

Por ejemplo, la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, con $a=10, b=6$ y

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$ y la onda de la senoide $y=8\sin\left(\frac{x}{6}\right)$

tienen la misma longitud $\ell = 4aE(m)$ siendo $a=10$, $m=\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{64}{100}=0.64$

$\ell = 40E(0.64)$, consultando en tablas $E(0.64)\approx 1.276349943$

$\ell \approx 40(1.276349943) = 51.05399772$

Leonardo Sáenz Baez
Enero de 2019